**3.1 群的定义** 2021年6月23日09点38分

**3.1.1 定义**. 集合上的**二元运算**是从中元素的所有有序对集合映射到的函数.

1. 如果对所有成立,则二元运算被称为**结合性[associative]**.
2. 令元素,如果且对所有成立,则元素被称为的**单位[identity]**元素.
3. 如果具有单位元素,并且如果且,则称为的**逆[inverse]**,其中.

**3.1.2 命题**. 令是集合上的结合二元运算.

1. 运算至多有一个单位元素.
2. 如果具有一个单位元素,则中的任意元素至多有一个逆.

**3.1.3 命题**. 令是集合上的结合二元运算.如果具有一个单位元素并且分别具有逆和,则的逆存在并且等于,的逆存在并且等于.

**3.1.4 定义**. 用标记非空集合G以及G上的二元运算.即,下列条件必须满足.

1. **闭包[Closure]**:对于所有的,元素是G的一个良好定义元素.如果下列属性满足,则被称为一个群[group].
2. **结合性**:对于所有的,我们有.
3. **单位**:存在一个单位元素,也就是,元素使得和对所有的成立.
4. **逆**:对于每一个存在一个逆元素,也就是,元素使得和.

**3.1.4a(定义3.1.4的重新陈述)** 一个群是一个非空集,带有一个结合二元运算,使得包含一个用于运算的单位元素,并且的每个元素在中有一个逆.

**3.1.5定义**. 集合的所有排列的集合被标记为.集合的所有排列的集合被标记为.

群被称为上的**对称群**,被称为**度数为n的对称群**.

注意:和是排列的集合,也就是说它们包含的元素是排列,而不是元素值或排列.

**3.1.6 命题**. 如果是任意非空集合,则在函数的合成运算下是一个群.

**3.1.7 命题(群的消除属性)**. 令是一个群,并且令.

1. 如果,则.
2. 如果,则.

**3.1.8命题**. 如果是一个群并且令,则方程和中的每一个都有唯一解.反过来,令是一个具有结合二元运算的非空集,如果方程和对所有都有解,则是一个群.

**3.1.9定义**. 令是一个群,如果对所有成立,则被称为**阿贝尔[abelian]**群.

**3.1.10定义**. 如果群具有有限个元素,则称是**有限群**.在这种情况下,元素的数量称为的阶数,用表示.如果不是有限的,则称它为**无限群**.

**3.1.11定义**. 所有元素均为实数的可逆矩阵的集合被称为**实数上度为n的一般线性群**,标记为.

**3.2.12命题**. 集合在矩阵乘法下构成一个群.

**3.2 子群** 2021年6月23日11点35分

**3.2.1定义**. 令G是一个群,并且令H是G的子群.如果H本身在诱导运算下是一个群,则H被称为的子群.

**3.2.2命题**. 令G是一个具有单位元素的群,并且令H是G的子群.在H是G的子群当且仅当下列条件成立:

1. 对所有成立;
2. ;
3. 对所有成立.

**3.2.3推论**. 令G是一个群,并且令是G的子集.则是G的一个子群当且仅当H是非空的且对所有成立.

**3.2.4推论**. 令G是一个群,并且令H是有限的,G的非空子集.则H是G的一个子群当且仅当对所有成立.(**证明过程需要看懂**)

**3.2.5定义**. 令G是一个群,并且令是的任意元素.集合被称为**由生成的循环子群**.

如果存在一个元素使得,则群被称为**循环群**.在这种情况下被称为的一个**生成器**.

**3.2.6命题**. 令G是一个群,并且令.

1. 集合是G的一个子群.
2. 如果K是G的任意一个子群使得,则.

例题3.2.8-例题3.2.10没有看懂.

**3.2.7定义**. 令是群的一个元素.

如果存在一个正整数使得,则被称为具有**有限阶**,并且这样的最小正整数被称为的**阶**,标记为.如果不存在一个正整数n使得一个,则称具有**无限阶**.

**3.2.8命题**. 令是群的一个元素.

1. 如果具有无限阶,则对所有的整数.
2. 如果具有有限阶并且,则当且仅当.
3. 如果具有有限阶,则对于所有的整数,我们有当且仅当.此外,.

**3.2.9引理**. 令H是群G的一个子群.对于,如果,定义.则是一个等价关系.(**证明过程需要看懂**)

**3.2.10定理(拉格朗日)**. 如果是有限群的一个子群,则的阶是的阶的除数.(**证明过程需要看懂**)

**3.2.11推论**. 令G是一个阶数为的有限群.

1. 对于任意,是的一个除数.
2. 对于任意,.

**3.2.12推论**. 任意质数阶的群是循环的.

**3.3 构造例子** 2021年7月6日15点55分

**3.3.1定义**. 令G是一个群,令S和T是G的子群.则

**3.3.2命题**. 令G是一个群,令H和K是G的子群.如果对所有和成立,则是G的一个子群.

**3.3.3定义**. 令和是群.所有有序对被称为和的**直接积**,记为,其中,.

3.3.4命题. 令和是群.

如果直接积对所有的满足定义,则是一个群.

如果和分别具有阶和,则中的元素具有阶.

**3.3.5定义**. 令F是具有两个二元运算和的集合,并且这两个运算的单位元素分别是0和1,且.如果

1. F的所有元素集合在+下是一个阿贝尔群;
2. F的所有非零元素集合在下是一个阿贝尔群;
3. 和对所有成立.

则F被称为**域[field]**.

3.3.6定义. 令F是一个域.具有F中实体的所有可逆nxn矩阵的集合被称为**F上度数为n的一般线性群**,记为.

3.3.7命题. 令F是一个域.则在矩阵乘法下是一个群.

3.3.8定义. 令是群的一个非空子集.中元素的有限乘积和它们的逆被称为中的**词[world]**.S中所有词的集合用表示.

3.3.9命题. 令是群的一个非空子集.那么是G的一个子群,并且等于G的所有包含S的子群的交集.

**3.4 同构** 2021年7月7日15点39分

**3.4.1定义**. 令和是群,令是一个函数.如果是双射且满足

则被称为**群同构[group isomorphism]**.在这种情况下,被称为**同构**于,记为.

**3.4.2命题**

1. 一个群同构的逆是群同构
2. 两个群同构的合成是一个群同构.

**3.4.3命题**. 令是一个群同构.

如果a在中具有阶n,则在中具有阶n.

如果是阿贝尔群,则也是阿贝尔群.

如果是循环群,则也是循环群.

3.4.4命题. 令和是群,令是一个函数使得对所有成立.则是单射当且仅当意味着对所有成立.

3.4.5命题. 如果是正整数使得,则同构于.

**3.5 循环群** 2021年7月13日09点53分

3.5.1定理. 循环群的每个子群都是循环的.

3.5.2定理. 令G是一个循环群.

如果G是无穷的,则.

如果,则.

3.5.3命题. 令是一个阶有限循环群.如果,令,则,并且具有阶.

3.5.4推论. 令是一个阶有限循环群.

元素生成G当且仅当.

如果H是G的任意子群,则,则k是n的某个除数.

如果m和k是n的除数,则当且仅当.

3.5.5 定理. 令n是一个正整数,其质数分解为,其中.则

3.5.6推论. 令n是一个正整数,其质数分解为,其中.则

3.5.7定义. 令G是一个群.如果存在一个正整数N使得对所有的成立,则这样的最小正整数被称为G的**指数[exponent]**.

3.5.8引理. 令G是一个群,并且令是元素使得.如果a和b的阶互为质数,则.

3.5.9命题. 令G是一个有限阿贝尔群.

G的指数等于G中任意元素的最大阶.

群G是循环的当且仅当它的指数等于它的阶.

3.6 排列群 2021年7月14日09点39分

3.6.1定义. 对称群在集合S上的任意子群被称为排列群.

3.6.2定理(Cayley). 每个群同构于一个排列群.

3.6.3定义. 令是一个整数.一个规则边多边形的刚体运动群被称为第次二面体群[dihedral group],记为.

3.6.4命题. 的所有偶数排列的集合是的子群.

3.6.5定义. 的所有偶数排列的集合被称为个元素上的**交错群[alternating group]**,记为.

3.7 同态 2021年7月20日10点14分

3.7.1定义. 令和是群,并且令是一个函数.如果

则被称为**群同态[group homomorphism]**.

3.7.2命题. 如果是一个群同态,则

;

对所有成立;

对任意整数n和任意,;

如果并且a具有阶,则的阶在中是的除数.

3.7.3定义. 令是一个群同态,则

被称为的**核[kernel]**,记为.

3.7.4命题. 令是一个群同态,其中.

K是的子集使得对所有和成立.

同态是一对一当且仅当.

3.7.5定义. 令H是群G的一个子群,如果对所有和成立,则H被称为**正规[normal]子群**.

3.7.6命题. 令是一个群同态.

1. 如果是的一个子群,则是的一个子群.如果是满射[onto]且是的正规子群,则是的正规子群.
2. 如果是的一个子群,则是的一个子群.如果是的正规子群,则是的正规子群.

3.7.7命题. 令是一个群同态.因素集中的等价群的乘法定义是良好的,并且在该乘法下是一个群.自然投影通过定义是一个群.

3.7.8定理. 令是一个群同态.则存在一个群同构

其中定义为,对所有成立.

3.7.9命题. 令是一个群同态,并且.下列条件是等价的:

1. ;
2. ;
3. 对某些成立;
4. ;
5. 对某些成立;

3.8 陪集,正规子群,因子群 2021年7月21日09点49分

3.8.1命题. 令H是群G的一个子群,令.则下列条件等价:

;

;

;

.

3.8.2推论. 令H是G的一个子群.定义在G上的关系为:如果,令,对所有成立,那么该关系在G上是一个等价关系.

3.8.3定义. 令H是群G的子群,令.则集合

被称为在中由确定的**左陪集[left coset]**.相似地,在中由确定的**右陪集[right coset]**为下列集合

在中的左陪集数被称为在中的**索引[index]**,记为.

3.8.4命题. 令N是G的一个正规子群,令.如果且,则.

3.8.5定理. 如果N是G的一个正规子群,则N的左陪集的集合族在陪集乘积下是一个群,其中陪集乘积定义为

3.8.6定义. 如果N是G的一个正规子群,则G的左陪集群被称为由N决定的**因子群**.记为.

3.8.7命题. 令N是G的一个正规子群.

由定义的自然投影是一个群同态,并且.

的子群与G的子群H(满足条件)之间存在双射关系.特别的,如果K是的子群,则对应于G的子群;如果H是G的子群(满足条件),则对应的子群.

3.8.8命题. 如果H是群G的子群.下列命题等价:

H是G的正规子群;

对所有的成立;

对所有的,是集论乘积;

对所有的,当且仅当.

3.8.9定理(基本同态定理) 令是群.如果是一个同态,令,则.

3.8.10定义. 令G是一个非平凡群,如果它没有适当的非平凡正规子群,则称它为**单群[simple group]**.